

## 1 Vícecestý MergeSort.

Upravme MergeSort, aby rozdělil pole na  $k$  částí, ty pak setřídil rekurzivně a slil. V jakém čase lze slévat  $k$  setříděným polí o celkové délce  $n$ ? Jaká je pak celková časová složitost vícecestného MergeSort? Jaké se vyplatí zvolit  $k$ ?

## 2 Rekurence.

Vyřešte následující rekurence (kde vždy máme  $T(1) = 1$ ):

- a)  $T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$  (např. binární vyhledávání)
- b)  $T(n) = 16T(n/4) + \Theta(n)$
- c)  $T(n) = 8T(n/2) + \Theta(n^2)$
- d)  $T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2)$
- e)  $T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^3)$
- f)  $T(n) = 8T(n/2) + \Theta(n^3)$
- g)  $T(n) = 9T(n/2) + \Theta(n^3)$

## 3 „Nekuchařkové“ rekurence.

Vyřešte následující rekurence (opět máme  $T(1) = 1$ ):

- a)  $T(n) = 2T(n-1) + \Theta(1)$  (např. Hanojské věže)
- b)  $T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$
- c)  $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n \log n)$
- d)  $T(n) = \sqrt{n} \cdot T(\sqrt{n}) + \Theta(n)$
- e)  $T(n) = T(n/3) + T(n/7) + n$ .

## 4 Spletitý kabel.

Mějme dlouhý kabel, z jehož obou konců vystupuje po  $n$  drátech. Každý drát na levém konci je propojen s právě jedním na konci druhém a my chceme zjistit, který s kterým. K tomu můžeme používat následující operace:

- i) přivést napětí na daný drát na levém konci,
- ii) odpojit napětí z daného drátu na levém konci,
- iii) změřit napětí na daném drátu na pravém konci.

Navrhněte algoritmus, který pomocí těchto operací zjistí, co je s čím propojeno. Snažte se počet operací minimalizovat. (Bonus: umíte dokázat, že na asymptoticky menší počet operací úlohu vyřešit nelze?)

## 5 Převod mezi soustavami.

Mějme  $n$ -ciferné číslo v soustavě o základu  $z$  a chceme ho převést do soustavy o jiném základu ( $z$  považujeme za konstantu). Ukažte, jak to metodou Rozdělení a panuj zvládnout v čase  $O(\max(M(n), n \log n))$ , kde  $M(n)$  je čas potřebný na násobení  $n$ -ciferných čísel v soustavě o novém základu.

## 6 Vylepšená kuchařka.

Vylepšete Kuchařkovou větu (Master Theorem), aby pokrývala případy, kdy se velikosti podproblémů liší o konstantu, tedy  $T(n) \leq aT(n/b + k) + \Theta(n^c)$  pro konstantu  $k$ .

## 7 Spletitý kabel neadaptivně.

Pro úlohu Spletitý kabel naleznete *neadaptivní* řešení, což znamená, že dotaz posloupnost vykonaných operací je dána dopředu nezávisle na výsledcích provedených dotazů na napětí. Jinými slovy, následující provedená operace nezávisí na výsledcích předchozích dotazů. (Hint: je třeba nějak upravovat vaše řešení pro původní úlohu?)

## 8 Hanoj.

V úloze Hanojských věží máme 3 sloupy A, B, C, přičemž sloup A obsahuje  $n$  disků v pořadí dle jejich průměru (největší dole, nejmenší nahoře). Jak přemístit všechny disky ze sloupu A na B, přičemž je zakázáno položit větší disk na menší? Kolik přesunů musíme udělat?

## 9 Hanoj 2.

Přidejme k Hanojským věžím ještě jedno pravidlo: je zakázáno přenášet disky přímo ze sloupu A na B nebo opačně (každý přesun se tedy musí uskutečnit přes sloup C). I nyní je problém řešitelný. Jak a s jakou časovou složitostí?